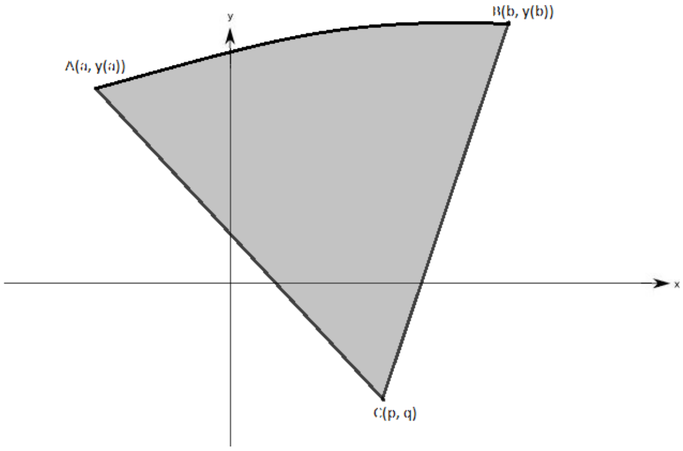
Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Математика и информатика 3(1) (2015), 1-16

Површине неких равних фигура

Жарко Ђурић
Париске комуне 14-2/18, Врање
zarkocr@gmail.com

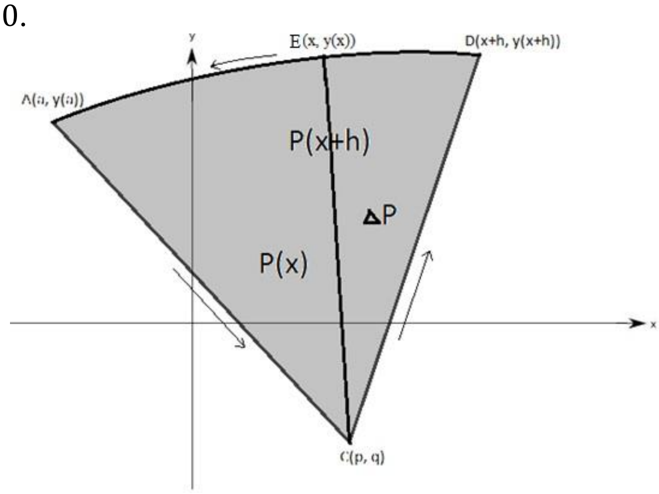
У часопису МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА (види [5]) објављен је рад *Од површине троугла до одређеног интеграла*. Овај рад представља наставак тог рада.

Нека је криволинијски троугао ABC равна фигура ограничена дужима CA, CB и кривом линијом BA одређене са $y=y(x)$, односно $F(x,y) = 0$ као на слици 1. и нека је функција $y=y(x)$ диференцијабилна на $[a,b]$. Задатак је израчунати површину ове равне фигуре.



Слика 1.

Означимо са $P(x)$ површину фигуре ACE, са $P(x+h)$ означимо површину фигуре ACD, са ΔP означимо површину фигуре ECD (видети слику 2), где је $a \leq x \leq b$, $x + h \leq b$ и $h > 0$.



Слика 2.

$\Delta P = P(x+h) - P(x)$

Тада је:

$$\Delta P \approx \frac{1}{2}[p(y(x+h)-y(x)) + (x+h)(y(x)-q) \; + x(q-y(x+h))]$$

(**Напомена:** На десној страни примењена је формула за израчунавање површине троугла на троугао CDE, види [5] стр. 49)

$$\Delta P \approx \frac{1}{2}[p(y(x+h)-y(x)) + xy(x) - qx \; + hy(x) \; - \; hq + qx - xy(x+h)]$$

$$\Delta P \approx \frac{1}{2}[hy(x) \; - \; hq \; + p(y(x+h)-y(x)) - \; x(y(x+h \; - y(x))]$$

$$\frac{\Delta P}{h} \approx \frac{1}{2}[y(x) - q + p\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - x\frac{y(x+h)-y(x)}{h}]$$

$$\mathrm{P}'(y,x,p,q) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta P}{h} = \frac{1}{2}[y(x) - \; q + p\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)- y(x)}{h} - x\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)- y(x)}{h}]$$

Означимо $P'(y,x,p,q)$ са $P'(x)$

Добијамо:

(1) $\boldsymbol{P'(x) = \frac{1}{2}(y(x) - q + (p-x)y'(x))}$

Ако посматрамо зависност величине $P'(y,x,p,q)$ од функције $y(x)$, онда $P'(y,x,p,q)$ можемо означити са $P'(y)$. Овде $P'(y)$ можемо схватити као неко пресликавање са скупа диференцијабилних функција у скуп функција, по формули (1), слично као што је то код извода. Тада имамо:

1) $P'(k_1y_1 + k_2y_2) = \; k_1P'(y_1) + k_2P'(y_2) + \frac{1}{2}q(k_1 + k_2 - 1)$, k_1, $k_2 \epsilon R$, односно

2) $P'(\sum_{i=1}^{n} k_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i P'(y_i) + \frac{1}{2}q(\sum_{i=1}^{n} k_i - 1)$, $k_1, k_2, \ldots, k_n \epsilon R$.

Доказ:

$P'(k_1y_1+k_2y_2) = \frac{1}{2}[(k_1 y_1+k_2y_2)-q+p(k_1y_1+k_2y_2)' - x(k_1y_1+k_2y_2)']$

$= \frac{1}{2}[k_1y_1+k_2y_2-q+pk_1y_1'+pk_2y_2' - xk_1y_1' - xk_2y_2']$

$= \frac{1}{2}[(k_1y_1-k_1q+pk_1y_1'-xk_1y_1') + (k_2y_2-k_2q+pk_2y_2' - xk_2y_2')+k_1q+k_2q-q]$

$= \frac{1}{2}k_1(y_1-q+py_1'-xy_1')+\frac{1}{2}k_2(y_2-q+py_2'-xy_2')+\frac{1}{2}q(k_1+k_2-1)$

$=k_1P'(y_1)+k_2P'(y_2)+\frac{1}{2}q(k_1+k_2-1)$.

Индукцијом се доказује 2).

Ако је q=0, онда вреди линеарност, тј. $P'(y_1+y_2) = P'(y_1)+P'(y_2)$ и $P'(ky) = kP'(y)$.

Из (1) излази

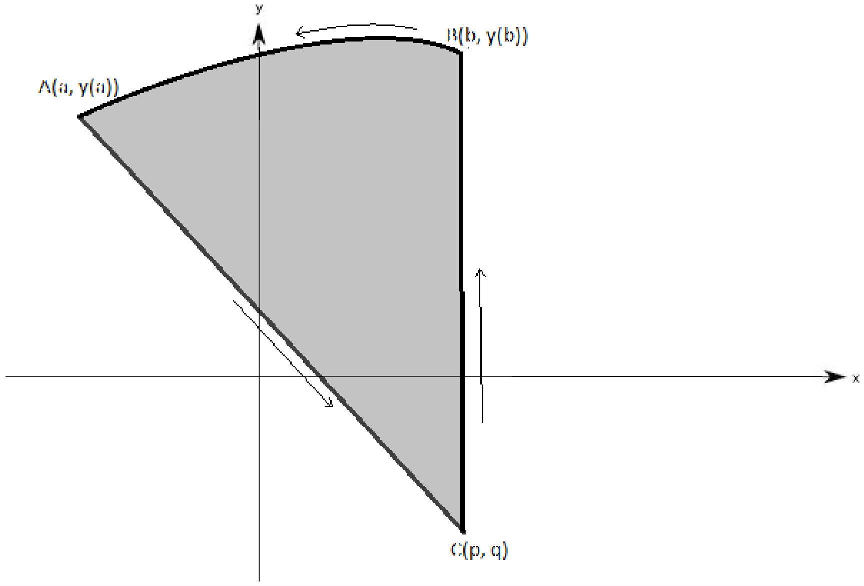
$P = \frac{1}{2}\int (y - q + (p - x)y')dx$. Нека је $P(y) = \frac{1}{2}\int (y - q + (p - x)y')dx$, тада важи:

3) $P(k_1y_1+k_2y_2) = k_1P(y_1)+k_2P(y_2)+\frac{1}{2}q(k_1+k_2-1)\int dx$, $k_1, k_2 \in R$, односно

4) $P(\sum_{i=0}^{n} k_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i P(y_i) + \frac{1}{2} q(\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)\int dx$, $k_1, k_2, \ldots, k_n \in R$.

Из (1) долазимо до формуле:

(2) $\boldsymbol{P = \frac{1}{2}\int_a^b (y - q + (p - x)y')dx}$, $p, q \neq 0$ (слика 3.)

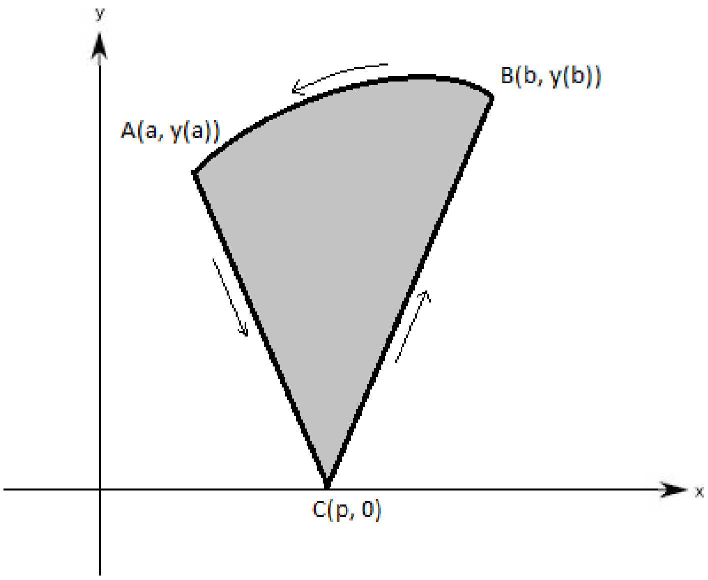


Слика 3.

Ако је q=0 добијамо формулу

(3) $\boldsymbol{P' = \frac{1}{2}(y + (p - x)y')}$ односно

(4) $\boldsymbol{P = \frac{1}{2}\int_a^b (y + (p - x)y')dx}$ (слика 4.)

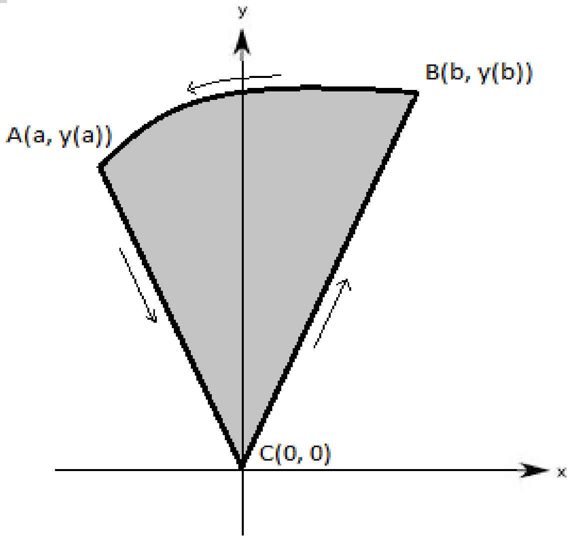


Слика 4.

Ако је и p=0 добијамо формулу

(5) $\boldsymbol{P' = \frac{1}{2}(y - xy')}$**,** односно

(6) $\boldsymbol{P = \frac{1}{2}\int_a^b (y - xy')dx}$ (слика 5.)

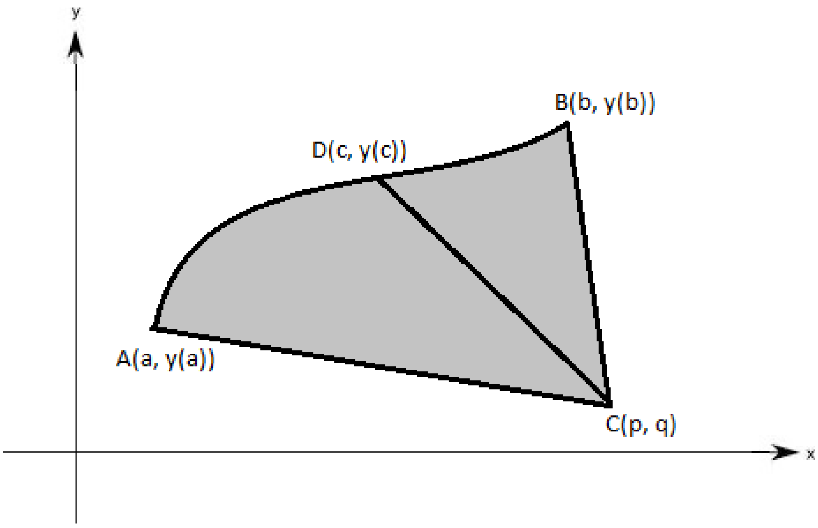


Слика 5.

Оријентација фигуре се одређује тако што се полази од B(b,y(b)) према A(a,y(a)) и наставља даље док се не дође до B. Ако је на тај начин фигура позитивно оријентисана тада је P позитивно, у противном P је негативно.Означимо са $|P|$ површину фигуре. (Види [5] стр 51, 53, 54, 57)

Ево две особине које излазе из формула (1) и (2):

а) $P = \int_a^b P'dx = \int_a^c P'dx + \int_c^b P'dx$, где је $a < c < b$ (слика 6.)



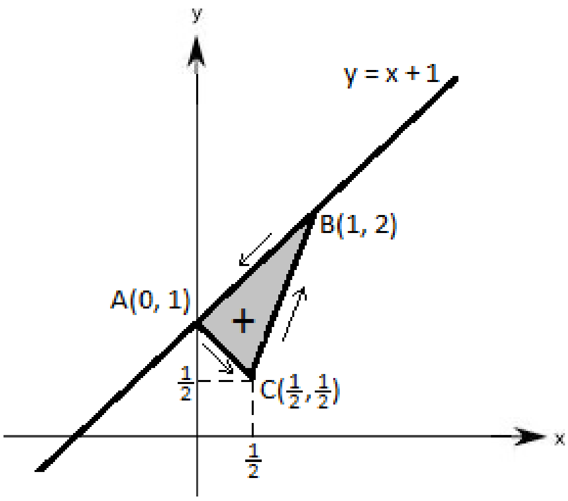
Слика 6.

б) $\int_a^b P'dx = -\int_b^a P'dx$

ПРИМЕРИ

У следећим примерима показаћемо примену формула (2), (4) и (6) на израчунавање површина неких равних фигура. Наведени начин у наредним примерима поједностављује поменуто израчунавање. Фигуре чије површине израчунавамо су осенчане и оријентисане.

Пример 1.



Слика 7.

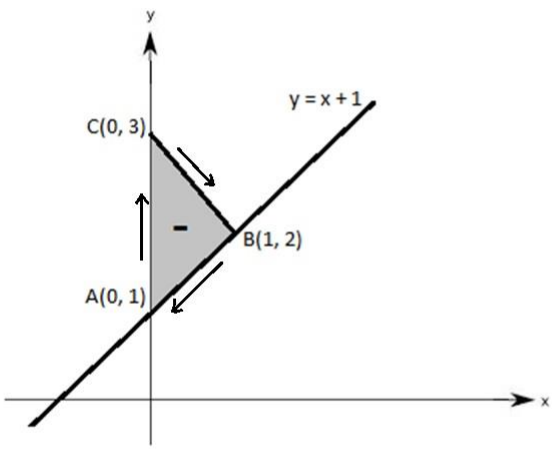
Дато је $y= x+1$, C($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$), $p = \frac{1}{2}$, $q= \frac{1}{2}$. Наћи површину фигуре са слике.

$y' = 1$

$P' = \frac{1}{2}(x + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - x\cdot 1) = \frac{1}{2}$

$P = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}$.

Пример 2.



Слика 8.

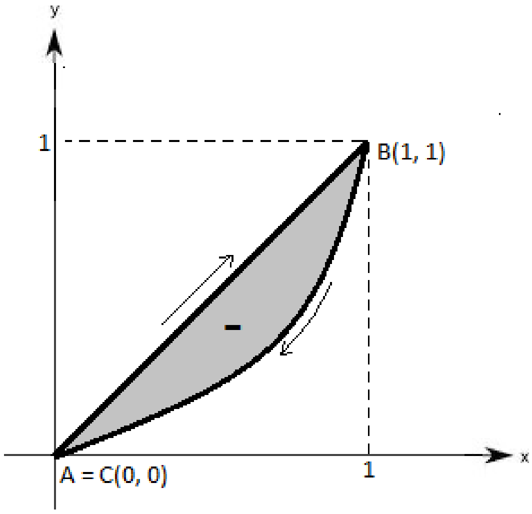
Дато је $y = x + 1$, C(0,3), $p = 0$, $q = 3$. Наћи површину фигуре са слике.
$y' = 1$

$P' = \frac{1}{2}(x + 1 - 3 + 0 \cdot 1 - x \cdot 1) \; = \; -1$

$P = -\int_0^1 dx = -1,$

$|P| = 1$ (површина посматране фигуре)

Пример 3.



Слика 9.

Дато је $y = x^2$, C(0,0), $p=0$, $q = 0$. Наћи површину фигуре са слике.
$y' = 2x$

$P' = \frac{1}{2}(x^2 - x \cdot 2x) = -\frac{1}{2}x^2$

$$P = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = \cdots = -\frac{1}{6}$$

$|P| = \frac{1}{6}$

Пример 4.

Дато је $y = x^2$, C$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$. Наћи површину фигуре са слике.

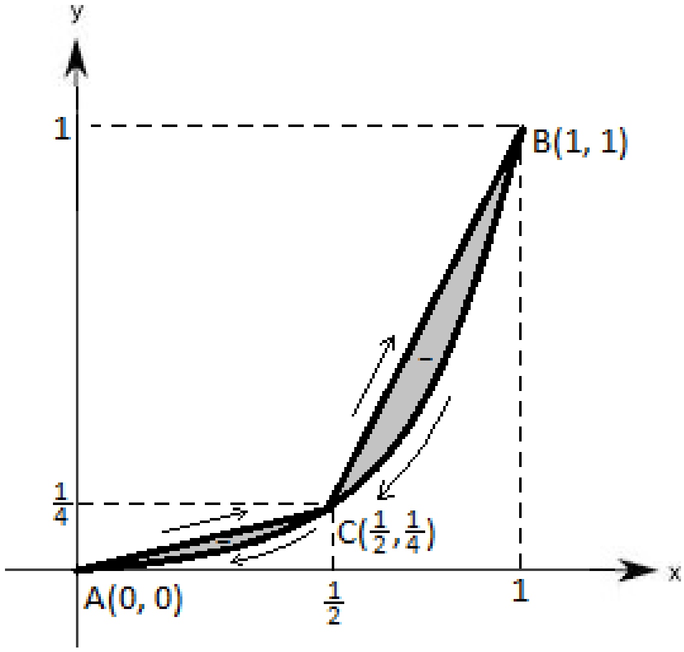
$y' = 2x$

$P' = \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}2x - x \cdot 2x)$

$P' = \frac{1}{2}(-x^2 + x - \frac{1}{4})$

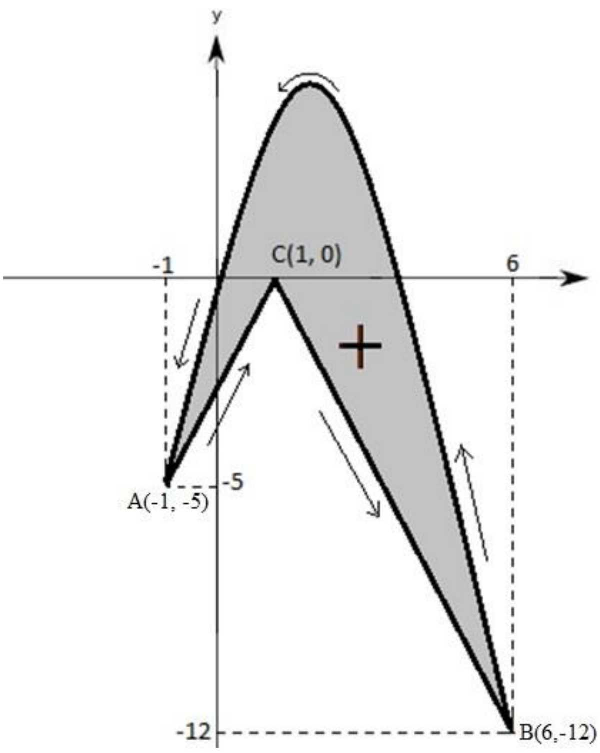
$$P = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-x^2 + x - \frac{1}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{24}$$

$$|P| = \frac{1}{24}$$



Слика 10.

Пример 5.



Слика 12.

Дато је y = $-x^2+4x$, C(1,0), p=1, q =0, A(-1,5), B(6,-12) где су A и B тачке на параболи. Наћи површину фигуре са слике.

$y' = -2x+4$

$P' = \frac{1}{2}[-x^2 + 4x + (-2x + 4) - x(-2x + 4)]$

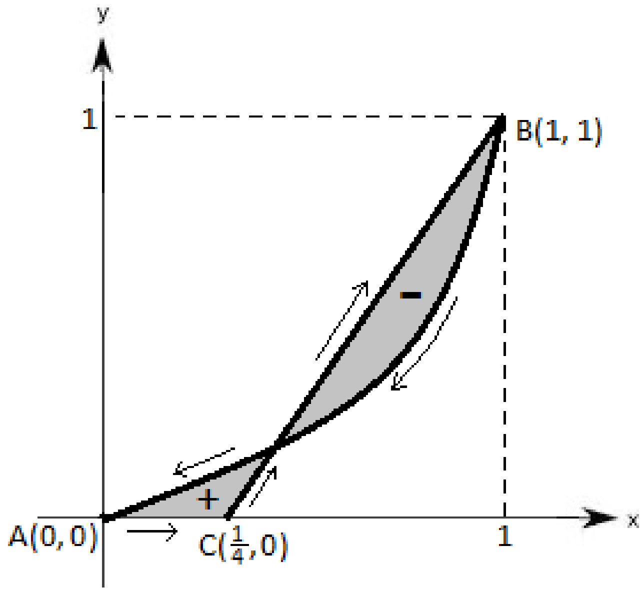
$P' = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 4)$

$P = \frac{1}{2}\int_{-1}^{6}(x^2 - 2x + 4)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right)|_{-1}^{6}$

$= \frac{1}{2}[(\frac{6^3}{3} - 62 + 4.6) - (\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 + 4(-1))] = \frac{98}{3}$

Уколико линија којом је ограничена фигура није проста и имамо делове фигура који су позитивно оријентисани и делове који су негативно оријентисани, онда ће примена формуле (2) довести до резултата који је једнак разлици површина позитивно и негативно оријентисаних делова. Резултат у општем случају може бити и позитиван и негативан (види [5], стр. 53, слика 5; стр.57, слика 12).

Пример 6.



Слика 11.

Дато је $y = x^2$, C($\frac{1}{4}$,0), p=$\frac{1}{4}$, q =0. Наћи P.

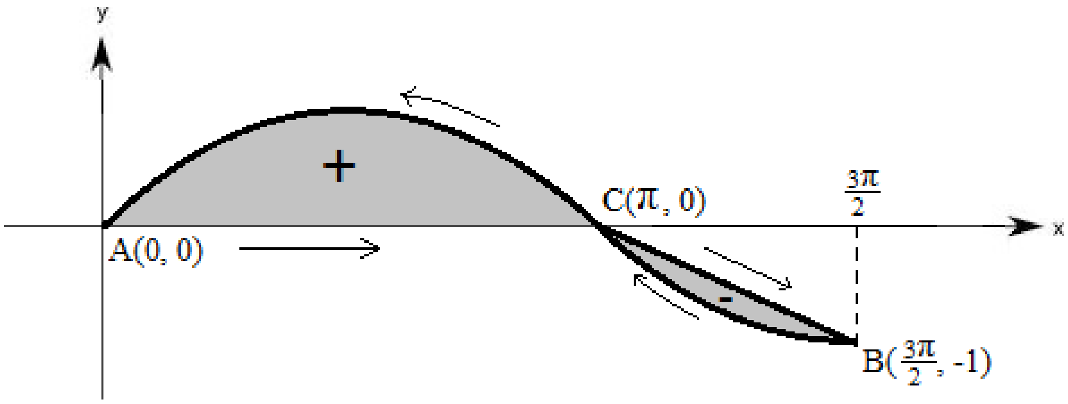
$y' = 2x$

$P' = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{4}2x - x\cdot 2x)$)

$P' = \frac{1}{2}(-x^2 + \frac{1}{2}x)$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-x^2 + \frac{1}{2}x\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{24}$$

Пример 7.



Слика 13.

Дато је $y = sinx$, C(π,0), p=π, q =0. Наћи P.

$y' = cosx$

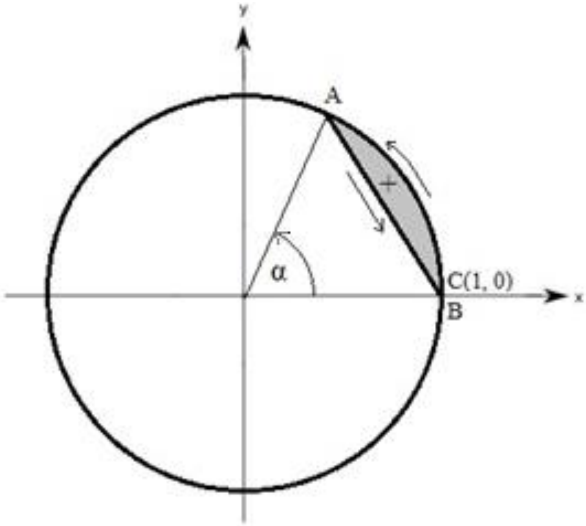
$$P' = \frac{1}{2}(sinx + \pi cosx - xcosx)$$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (sinx + \pi cosx - xcosx)\, dx$$

$$P = \frac{1}{2}(-cosx + \pi sinx - xsinx - cosx)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

У наредним примерима криве су задате параметарски. Ако се функција $y(x)$ може параметризовати као x=$u(t)$, y=$v(t)$, тада је $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v'(t)}{u'(t)}$, односно $y'_x = \frac{v'_t}{u'_t}$ и $dx = u'_t dt$. Формула (2) тада постаје $P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[v(t) - q + (p - u(t))\frac{v'_t}{u'_t}\right] u'_t dt$.

Пример 8.



Слика 14.

Дато је x^2+y^2 = 1, C(1,0), p=1, q =0. Наћи површину осенчаног дела фигуре са слике.

$x = cost \quad y = sint \quad x'_t = -sint \quad y'_t = cost \quad y'_x = -\frac{\cos t}{\sin t}$

$$P' = \frac{1}{2}\left(sint - \frac{cost}{sint} + cost\frac{cost}{sint}\right)$$

$$P' = \frac{1}{2}\frac{sin^2 t - \cos t + cos^2 t}{sint}$$

$$P' = \frac{1}{2}\frac{1 - cost}{sint}$$

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0}\frac{1-cost}{sint}(-sint)dt = -\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0}(1-cost)dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha}(1-cost)dt =$$

$$= \frac{1}{2}(t - sint)\Big|_{0}^{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha - sin\alpha).$$

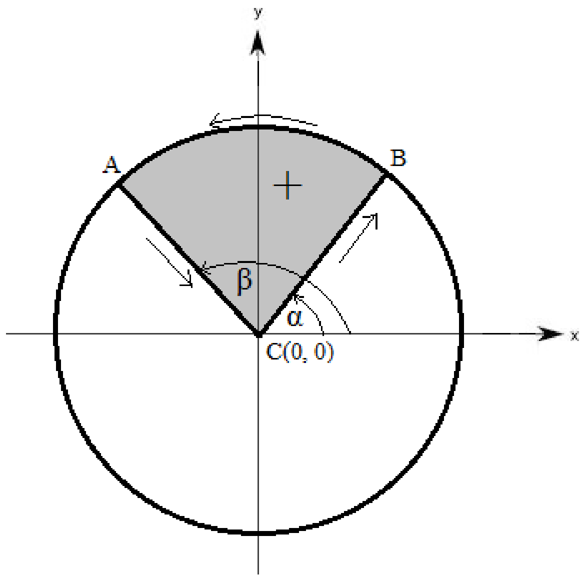
За неке специјалне вредности угла α биће:

$\alpha = \frac{\pi}{6}, \quad P = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)$

$\alpha = \pi, \quad P = \frac{1}{2}(\pi - sin\pi) = \frac{\pi}{2}$

$\alpha = 2\pi, \quad P = \frac{1}{2}(2\pi - sin2\pi) = \pi.$

Пример 9.



Слика 15.

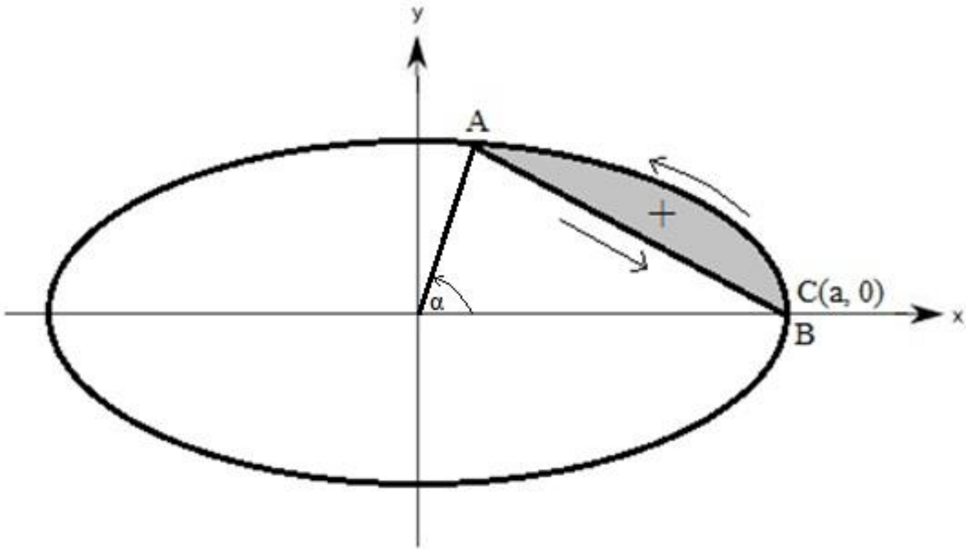
Дато је x^2+y^2 = 1, C(0,0), p=0, q=0. Наћи површину осенчаног дела фигуре са слике.

$x = cost$ $\quad y = sint$ $\quad x'_t = -sint$ $\quad y'_t = cost$ $\quad y'_x = -\dfrac{\cos t}{\sin t}$

$P' = \frac{1}{2}(sint + cost\frac{cost}{sint}) = \frac{1}{2}\frac{1}{sint}$

$$P = \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{1}{sint}(-sint)dt = -\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}dt = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}dt = \left(\frac{1}{2}t\right)|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$$

Пример 10.



Слика 16.

Дато је $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$, C(a,0), p=a, q =0. Наћи површину осенчаног дела фигуре са слике.

$x = acost \quad y = b\ sint \quad x'_t = -asint \quad y'_t = bcost \quad y'_x = -\frac{bcost}{asint}$

$$P' = \frac{1}{2}(bsint - a\frac{bcost}{asint} + acost\frac{bcost}{asint})$$

$$P' = \frac{1}{2}\frac{absin^2t - abcost + abocs^2t}{asint} = \frac{1}{2}ab\frac{1-cost}{asint}$$

$$P' = \frac{b}{2}\frac{1-cost}{sint}$$

$$P = \frac{b}{2}\int_{\alpha}^{0}\frac{1-cost}{sint}(-asint)dt$$

$$= -\frac{ab}{2}\int_{\alpha}^{0}(1-cost)dt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{\alpha}(1-cost)dt = \frac{ab}{2}(t - sint)|_{0}^{\alpha}$$

$$= \frac{ab}{2}(\alpha - sin\alpha)$$

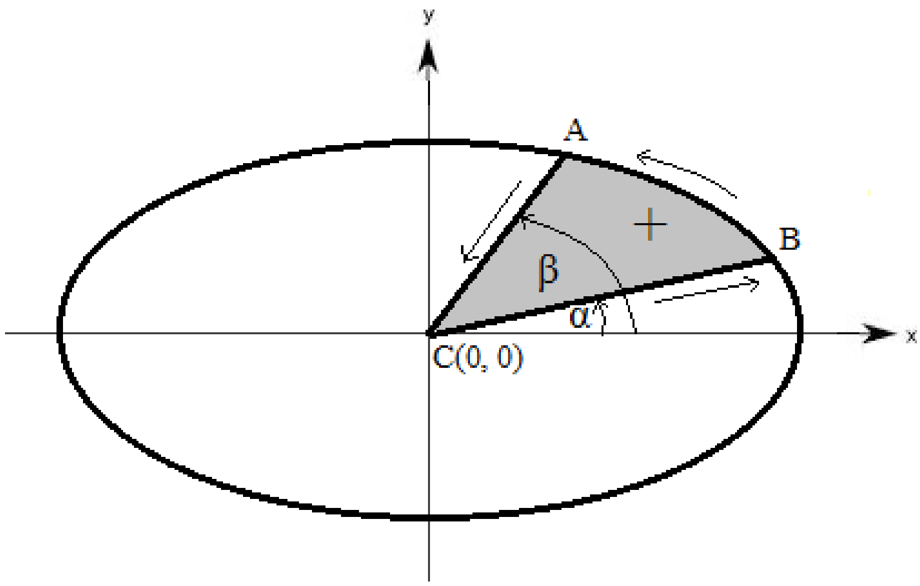
За неке специјалне вредности угла α биће:

$\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\quad P = \frac{ab}{2}(\frac{\pi}{2} - sin\frac{\pi}{2}) = \frac{ab}{2}(\frac{\pi}{2} - 1)$

$\alpha = \pi$, $\quad P = \frac{ab}{2}(\pi - sin\pi) = \frac{ab\pi}{2}$

$\alpha = 2\pi$, $\quad P = \frac{ab}{2}(2\pi - sin2\pi) = ab\pi$.

Пример 11.



Слика 17.

Дато је $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$, C(0,0), p=0, q =0. Наћи површину осенчаног дела фигуре са слике.

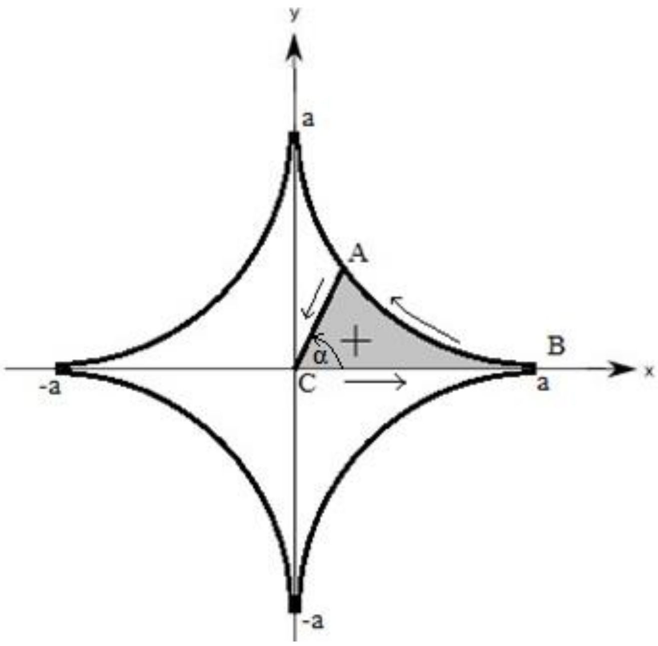
$x = acost \quad y = b\ sint \quad x'_t = -asint \quad y'_t = bcost \quad y'_x = -\frac{b\cos t}{a\sin t}$

$P' = \frac{1}{2}(bsint + acost\frac{bcost}{asint})$

$P' = \frac{1}{2}\frac{b(sin^2t+cos^2t)}{sint} = \frac{b}{2}\frac{1}{sint}$

$P = \frac{b}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{1}{sint}(-asint)dt = \frac{ab}{2}\int_{\alpha}^{\beta}dt = \frac{ab}{2}t\Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{ab}{2}(\beta - \alpha)$.

Пример 12.



Слика 18.

Дато је $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, a>0, C(0,0), p=0, q=0. Наћи површину осенчаног дела астроиде (слика 18.).

$x = acos^3t,\ y = asin^3t, \quad x_t' = -3acos^2tsint, \quad y_t' = 3asin^2tcost$

$y_x' = \frac{3asin^2tcost}{-3acos^2tsint} = -\frac{sint}{cost}$

$P' = \frac{1}{2}(asin^3t + acos^3t\frac{sint}{cost})$

$P' = \frac{a}{2}(sin^3t + cos^2tsint) = \frac{a}{2}sint$

$P = \frac{a}{2}\int_{\alpha}^{0}sint3acos^2t\,(-asint)\,dt = \frac{-3a^2}{2}\int_{\alpha}^{0}sint^2tcos^2t\,dt =$

$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1}{4}sin^22tdt = \frac{3a^2}{28}\int_0^{\alpha}\frac{1-cos4t}{2}dt = \frac{3a^2}{16}(t - \frac{sin4t}{4})\Big|_0^{\alpha} = \frac{3a^2}{16}(\alpha - \frac{sin4\alpha}{4})$.

За неке специјалне вредности угла α биће:

$\alpha=\frac{\pi}{4}$, $P=\frac{3a^2}{16}(\frac{\pi}{4}-0)=\frac{3a^2\pi}{64}$

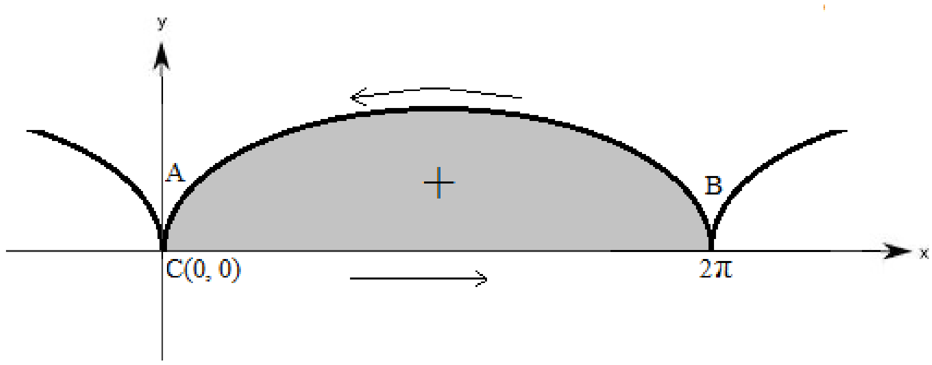
$\alpha=\frac{\pi}{2}$, $P=\frac{3a^2\pi}{32}$

$\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $P=\frac{9a^2\pi}{64}$

$\alpha=\pi$, $P=\frac{3a^2\pi}{16}$

$\alpha=2\pi$, $P=\frac{3a^2\pi}{8}$.

Пример 13.



Слика 19.

Наћи површину између једног лука циклоиде задате параметарским једначинама $x=a(t-sint)$, $y=a(1-cost)$ и x-осе (слика 19.), где су C(0,0), p=0 и q=0.

$x_t'=a(1-cost)$, $y_t'=asint$

$y_x'=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

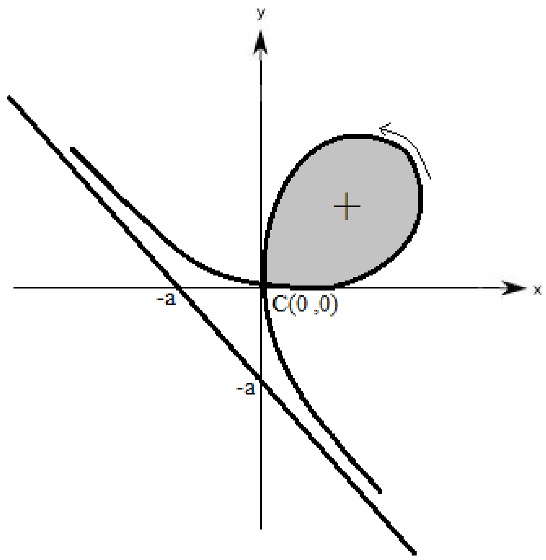
$P'=\frac{1}{2}[a(1-cost)-a(t-sint)\frac{\sin t}{1-\cos t}]=$

$=\frac{a}{2}\frac{1-2\cos t+\cos^2 t-t\sin t+\sin^2 t}{1-\cos t}=\frac{a}{2}\frac{2-2\cos t-t\sin t}{1-\cos t}$

$P=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\frac{2-2cost-tsint}{1-cost}(1-cost)dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(2-2cost-tsint)dt$

$P=\frac{a^2}{2}(2t-2sint+tcost-sint)\Big|_0^{2\pi}=3a^2\pi.$

Пример 14.



Слика 20.

Наћи површину петље Декартовог листа (слика 20). Декартов лист је задат алгебарском једначином $x^3+y^3 = 3axy$, $a>0$ где је његова асимптота $x+y+a=0$.

$y = tx \quad x^3(1+t^3) = 3atx^2 \quad x = \frac{3at}{1+t^3} \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

$x_t' = x_t' = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \quad y_t' = \frac{3a(2t-t^4)}{(1+t^3)^2} \quad y_x' = \frac{2t-t}{1-2t^3}$

$P' = \frac{1}{2}\left(\frac{2at^2}{1+t^3} - \frac{3at}{1+t^3}\cdot\frac{2t-t^4}{1-2t^3}\right)$

$P = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{0}\left(\frac{2at^2}{1+t^3} - \frac{3at}{1+t^3}\cdot\frac{2t-t^4}{1-2t^3}\right)\frac{3a(1-2t^3)}{(1+2t^3)^2}dt$

$$P = \frac{9a^2}{2}\int_{\infty}^{0}\frac{-t^2(1+t^3)}{(1+t^3)^3}dt = \frac{9a^2}{2}\int_{\infty}^{0}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$P = \frac{9a^2}{2}\frac{1}{3}\int_{0}^{\infty}\frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2}dt = \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{-1}{1+t^3}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{3a^2}{2}$

(**Напомена:** Види [6], стр. 148, Пример 7)

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Марјановић, *Математичка анализа I*, Научна књига, Београд, 1983.

[2] Ј. Д. Кечкић, *МАТЕМАТИКА са збирком задатака за IV разред средње школе*, НАУКА, Београд, 1990.

[3] Т. Пејовић, *Математичка анализа*, Грађевинска књига, Београд, 1972.

[4] Д. Тошић, *Математика III*, Академска мисао, Београд 2006.

[5] Ж. Ђурић, *Од површине троугла до одређеног интеграла*, Математика и информатика, 2:4 (2015), 49 – 72.

[6] М. Обрадовић, Д. Георгијевић, *МАТЕМАТИКА са збирком задатака за IV разред средњег образовања и васпитања,* Научна књига, Београд, 1990.